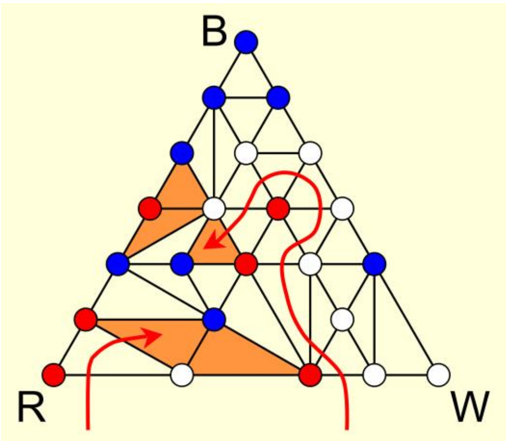
Uitwerking puzzel 92-2 Gevangen in oranje

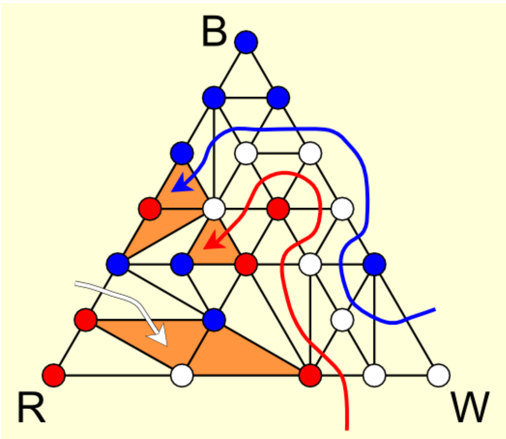
Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Deze puzzel was gebaseerd op het lemma van Sperner: Elke getrianguleerde driehoek met een Sperner labelling (= kleuring van alle hoekpunten volgens onderstaand recept) bevat een driehoekje met drie verschillende kleuren hoekpunten). Met dat lemma liet Hans Finkelnberg ons bij een masterclass zien hoe je daarmee o.a. de dekpuntstelling van Brouwer kunt bewijzen.

Gegeven een driehoek *D* met tegen de klok in hoekpunten *R*, *W* en *B*. We kleuren elk hoekpunt met een andere kleur: *R* wordt rood, *W* wit en *B* blauw. Vervolgens zetten we een aantal punten op de zijden en/of in het binnengebied van *D*. Deze kleuren we naar keuze elk met een van die kleuren waarbij op elke zijde van *D* hoogstens twee verschillende kleuren komen, dus inclusief de hoekpunten van de betreffende zijde.
Ten slotte gaan we *D* trianguleren door elkaar niet snijdende lijnstukjes tussen de punten te tekenen tot het geheel is verdeeld in kleine driehoekjes. Er mogen geen punten meer in het inwendige van de kleinste driehoekjes of op de zijden ervan overblijven. Het binnengebied van driehoekjes met drie verschillend gekleurde hoekpunten kleuren we oranje.



Figuur 1



Figuur 2

We kunnen ons het resultaat voorstellen als de plattegrond van een driehoekige gevangenis met driehoekige cellen. De lijnstukjes tussen punten met gelijke kleur zijn muren. Alle andere lijnstukjes zijn deuren die echter maar van één kant zijn te openen met een passende sleutel.

Er zijn drie verschillende sleutels: Rob krijgt er een voor de deuren tussen rode en witte punten, die alleen open gaan als hij het rode punt links van zich heeft. Wim voor de deuren tussen witte en blauwe punten (witte punt links) en Bart voor die tussen blauwe en rode punten (blauwe punt links).

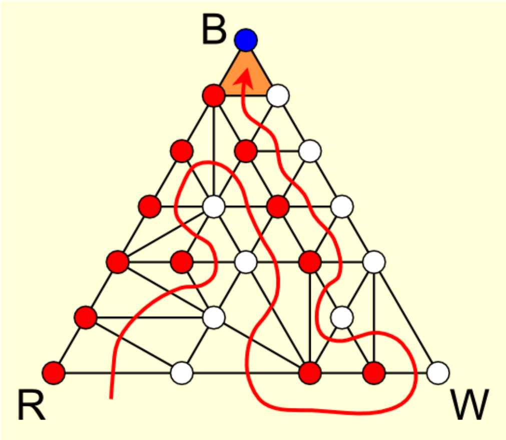
De buitendeuren kunnen slechts één keer worden geopend en na gebruik vallen alle deuren weer achter ze dicht in het slot. Er is dus geen weg terug.
Rob, Wim en of Bart worden de gevangenis ingestuurd en lopen zover ze kunnen in de hoop weer buiten te komen. Soms lukt dat, maar als er dan nog een buitendeur is die ze kunnen openen, worden ze onmiddellijk weer naar binnen gestuurd.

Zo ziet u in figuur 1 wat er kan gebeuren als Rob naar binnen wordt gestuurd. Tenslotte zit hij gevangen in een oranje gekleurde cel, welke buitendeur hij ook aanvankelijk kiest.

Nu worden ook Wim en Bart naar binnen gestuurd in de driehoek van figuur 1. We kijken naar alle kleine driehoekjes (cellen) die minstens één van de drie heeft bezocht of in is vastgelopen.

Opgave 1. Hoeveel cellen kunnen er maximaal zijn bezocht, inclusief de cellen waar ze eindigen?

Zie figuur 2. Voor Rob is het maximum tien cellen, voor Wim twee en voor Bart negen. Totaal 21 cellen.
De enige keuze die ze hebben is door welke deur ze naar binnen gaan. Daarna ligt de route vast door de kleur van de hoekpunten van de cellen. De in figuur 2 ingetekende routes gaan door meer cellen dan de andere mogelijkheden.
Nu mag u de kleuren van de punten (behalve *R*, *W* en *B*) in fig. 1 veranderen, wel volgens de genoemde voorwaarden.



Figuur 3

Opgave 2a. Bepaal een kleuring, zo dat Rob zoveel mogelijk cellen kan hebben bezocht.

Zie figuur 3. Bij de aangegeven kleuring van de punten kan Rob alle cellen bezoeken tot hij uiteindelijk in de enige oranje cel vastloopt.

Daarmee zijn tegelijk ook de opgaven 2b en 3 beantwoord, omdat het resultaat van opgave 2a niet meer verbeterd kan worden door ofwel ook Rob en Wim naar binnen te laten gaan ofwel de triangulatie te veranderen.

Opgave 2b en 3 waren:

Opgave 2b. Zelfde vraag: Onderzoek of het mogelijk is dat als ook Rob en Wim de gevangenis in worden gestuurd, ze samen alle cellen van binnen kunnen hebben gezien.
Opgave 3. Zelfde vragen als opgave 2, maar nu mag u zowel de kleuren als de triangulatie in fig. 1 veranderen. Het aantal punten op elke zijde van *D* en in het binnengebied blijft hetzelfde. U mag ze wel verschuiven.

Het was overigens niet onze bedoeling dat bij opgave 2a al alle cellen konden worden bezocht, maar dan hadden we een andere triangulatie moeten kiezen.

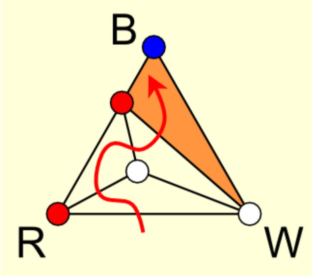
Hans Linders vroeg zich af of het mogelijk is om in opgave 3 meer cellen te maken zonder het aantal punten binnen *D* en op de zijden van *D* te veranderen, zodat Rob als hij ze allemaal bezoekt meer cellen bezocht heeft dan in opgave 2. Zijn conclusie is: nee, als het aantal punten op de zijden en het aantal punten in het binnengebied gegeven zijn ligt het aantal cellen vast. Als r het aantal randpunten is (exclusief de hoekpunten *R*, *W* en *B*) en b het aantal binnenpunten, dan is het aantal driehoeken altijd $d = 2b + r + 1$. Voor een bewijs zie het eind van deze uitwerking.

Frans van Hoeve en Harm Bakker gaven een mooie methode om na te gaan of, bij de gegeven triangulatie, een kleuring mogelijk is zodanig dat (b.v. Rob) alle cellen kan bezoeken voordat hij vastloopt. Ook dat vindt u aan het einde van deze uitwerking.

Bij de volgende opgave mocht u het aantal punten op de zijden en in het binnengebied van *D* zelf bepalen.

Opgave 4a. Bepaal een triangulatie en kleuring met zo min mogelijk punten, maar minstens één in het binnengebied van *D*, zodanig dat Rob nadat hij is vastgelopen alle cellen kan hebben bezocht.
Opgave 4b. Idem, maar nu met minstens acht punten in het binnengebied.

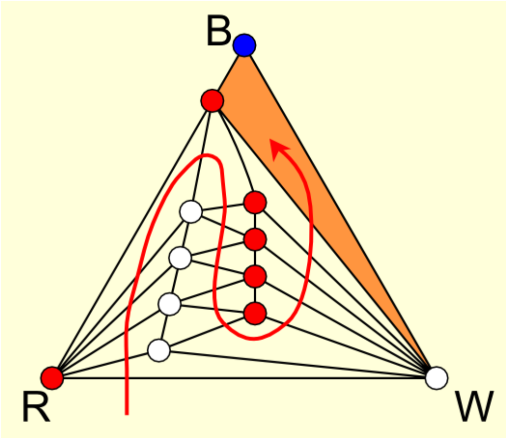
Als Rob kan binnenlopen in een cel waarvan één hoekpunt blauw is dan heeft die cel drie verschillend gekleurde hoekpunten en loopt Rob er dus in vast. Als er meer dan één cel is met een blauw hoekpunt kan Rob dus nooit alle cellen bezoeken. Omdat punt *B* altijd blauw is kan *B*, als Rob alle cellen moet kunnen bezoeken, dus maar van één driehoekje hoekpunt zijn. De andere twee hoekpunten van die driehoek moeten dan dus op de zijden *RB* en *BW* liggen. Daarvan kan er maar één een hoekpunt van *D* (*R* of *W*) zijn, anders is er geen plaats voor punten in het binnengebied.



Figuur 4

Behalve de punten in het binnengebied moet er in opgave 4a en 4b dus minstens één punt op de zijden liggen. We hebben dus voor 4a minstens twee punten nodig en voor 4b negen (plus natuurlijk de punten *R*, *W* en *B*). Zie figuur 4 en 5 voor voorbeelden van een triangulatie en kleuring met twee respectievelijk negen punten.

Opgave 5. Leg uit, dat bij elke triangulatie en elke kleuring onder de gegeven voorwaarden, elke persoon ergens binnen de driehoek *D* zal vastlopen in een oranje cel.



Figuur 5

Om te beginnen stellen we vast dat de gevangenen geen rondjes kunnen lopen en zelfs elke cel hoogstens één keer kunnen bezoeken.
Als b.v. Rob een rondje rechtsom zou lopen dan zijn alle punten aan de buitenkant van dat rondje rood. Maar dan kan hij dat rondje nergens binnengaan.
Ook het pad dat hij loopt van een deur naar binnen naar een deur naar buiten heeft aan de ene kant alleen witte punten en aan de andere kant alleen rode. Diezelfde deur naar buiten kan hij dus ook maar één keer gebruiken.
Ten slotte: hij kan alleen vastlopen in een oranje cel. Als hij een cel binnengaat heeft die cel dus een rood en een wit punt. Het derde punt is ofwel rood of wit, en dan kan hij er weer uit, ofwel het is blauw, en dan is de cel oranje.
Als bv. Rob de gevangenis ingaat, dan loopt hij dus ofwel vast in een oranje cel, ofwel hij verlaat de gevangenis weer door een deur naar buiten met een rood hoekpunt rechts en een wit hoekpunt links van zich. Als er dan nog een ongebruikte deur naar binnen is moet hij daarna weer naar binnen.
Of hij buiten kan blijven hangt dus af van het aantal deuren naar binnen en naar buiten die beschikbaar zijn. Als er meer deuren naar binnen zijn dan naar buiten zal hij altijd vastlopen.

Die deuren naar binnen en naar buiten liggen voor Rob allemaal op het lijnstuk *RW*. Van links naar rechts vinden we daar altijd eerst één of meer rode hoekpunten, dan afwisselend steeds één of meer witte en weer één of meer rode en we eindigen met één of meer witte. Dat betekent dat we afwisselend een deur naar binnen en een naar buiten vinden, beginnend en eindigend met een deur naar binnen.
Er is dus precies één deur naar binnen meer dan naar buiten, dus Rob loopt altijd vast.

Stelling: Als een driehoek *RWB* met r extra punten op de zijden en b binnenpunten volledig getrianguleerd is, dan is het aantal driehoeken altijd $d = 2b + r + 1$.

Lemma: De triangulatie van een n-hoek zonder binnenpunten levert altijd $n – 2$ driehoekjes op. Het bewijs laten we aan de lezer over.

Bewijs van de stelling:

Laat *RWB* een driehoek zijn met r extra punten op de zijden en b binnenpunten die volledig getrianguleerd is met d driehoekjes.
We gaan eerst alle b binnenpunten verwijderen en tonen aan dat er dan $2b$ driehoekjes minder zijn. Daarna bepalen we het aantal driehoekjes in een getrianguleerde driehoek met alleen extra randpunten.

We verwijderen de b binnenpunten één voor één. Stel in een binnenpunt komen k driehoekjes samen. Als we dat punt en de lijnstukjes die daar samenkomen verwijderen dan verdwijnen er k driehoekjes en creëren we in de plaats daarvan een leeg polygoon met k zijden (niet per se convex). Volgens ons lemma kunnen we die altijd trianguleren met $k – 2$ driehoekjes. We zijn dus netto 2 driehoekjes kwijt. Als we alle b binnenpunten verwijderd hebben zijn we dus $2b$ driehoekjes kwijt, zodat we $d – 2b$ driehoekjes overhouden.

We hebben nu dus een driehoek zonder binnenpunten en r extra punten op de zijden, getrianguleerd met $d - 2b$ driehoekjes. We kunnen dat zien als een getrianguleerd polygoon met $r + 3$ hoekpunten (met r gestrekte hoeken). Volgens ons lemma zijn er dus $r + 3 - 2 = r + 1$ driehoekjes, dus $d - 2b = r + 1$ of $d = 2b + r + 1$.
Q.E.D.

Ten'slotte een methode om na te gaan of bij de triangulatie van opgave 1 en 2 een kleuring mogelijk is zodat Rob alle cellen kan bezoeken.
Bij opgave 4 hebben we al gezien dat als Rob alle cellen moet kunnen bezoeken er maar één blauw punt kan zijn, namelijk het punt *B*. Dat houdt in dat alle andere punten ofwel rood ofwel wit zijn. Dus zijn alle punten op zijde *RB* rood zijn en alle punten op *BW* wit. De punten in het binnengebied zijn rood of wit, maar geen cel mag drie dezelfde kleuren als hoekpunten hebben.
We zoeken nu steeds naar driehoekjes waarvan al twee hoekpunten gekleurd zijn met dezelfde kleur (rood of wit). Dan moet het derde hoekpunt rood zijn als de al gekleurde hoekpunten beide wit zijn en omgekeerd. We gaan hiermee door zolang er driehoekjes zijn met twee rode of twee witte hoekpunten en de derde nog ongekleurd.

Bij de triangulatie uit de opgaven 1 en 2 blijken we door te kunnen gaan tot alle hoekpunten gekleurd te zijn, en dan hebben we de kleuring zoals in figuur 3. En dan blijkt dat bij die kleuring Rob inderdaad alle cellen kan bezoeken. We weten daardoor nu zeker dat er geen andere oplossing van opgave 2a is waarbij Rob alle cellen kan bezoeken.

Er rijzen wel nieuwe vragen:
Lukt het bij elke triangulatie om alle punten op deze manier te kleuren?
Hebben we als dat inderdaad lukt altijd een oplossing waarbij Rob alle cellen kan bezoeken?

Dus er blijft nog iets om over na te denken.